



*Les samedis de la physique à Bruxelles*

*SaPhyBru*

*De la Mécanique Quantique Relativiste  
aux  
Champs Quantiques libres*

*Daniel Roegiers*

*Année 2021 - 2022*

# Table des matières

## Partie 1

1. Conventions et notations.....	5
2. Quelques brefs rappels de mécanique quantique.....	8
3. L'équation de Klein-Gordon .....	11
3.1 Construction de l'équation de Klein-Gordon .....	11
3.2 Forme matricielle de l'équation de Klein-Gordon .....	13
3.3 Solution générale de l'équation.....	14
3.4 Amplitude de probabilité .....	15
3.5 Invariance de Lorentz .....	16
3.6 Densité et courant de probabilité.....	16
3.7 Limite non relativiste .....	18
3.8 Antiparticule.....	19
3.9 Réinterprétation de l'équation de Klein-Gordon .....	20
4. L'équation de Pauli.....	21
4.1 La découverte du spin .....	21
4.2 Les rotations géométriques .....	22
4.3 Les matrices de Pauli .....	24
4.4 L'opérateur de rotation dans l'espace de spin.....	25
4.5 Construction de l'équation de Pauli .....	27
4.6 La version matricielle de l'équation de Klein-Gordon est-elle une équation à spineur ?.....	28
5. L'équation de Dirac .....	29
5.1 Réflexions préliminaires.....	29
5.2 Construction de l'équation de Dirac.....	29
5.3 Interprétation probabiliste.....	32
5.4 L'émergence du spin .....	33
5.5 Ondes planes monochromatiques .....	36
5.6 Propriétés des matrices de Dirac .....	37
5.7 Forme covariante de l'équation de Dirac .....	37
5.8 Transformation du spineur.....	38
5.9 Le spineur conjugué.....	40
5.10 L'équation adjointe de Dirac .....	41

5.11 Etats stationnaires d'un électron libre.....	41
5.12 Limite faiblement relativiste de l'équation de Dirac .....	48
5.13 La mer de Dirac.....	48
5.14 Faisons le point.....	49
6. Changement de Paradigme.....	51
7. La mécanique lagrangienne en théorie des champs .....	53
7.1 Quelques rappels de mécanique lagrangienne.....	53
7.2 Des points matériels aux champs classiques .....	54
7.3 Fonctionnelle et dérivée fonctionnelle.....	55
7.4 Les équations du mouvement du champ.....	58
7.5 Extension à un nombre arbitraire de champs .....	59
7.6 Le formalisme hamiltonien en théorie des champs .....	59
8. Le théorème de Noether en théorie quantique des champs .....	61
8.1 Définition des symétries .....	61
8.2 Le théorème de Noether .....	61
8.3 Symétrie interne.....	63
8.4 Symétrie externe.....	65
8.5 Généralisation à plusieurs champs .....	66
8.6 Formalisme général du théorème de Noether.....	67
8.7 Exemple .....	67
9. Les groupes de Poincaré et de Lorentz.....	69
9.1 Rappel élémentaire sur les groupes .....	69
9.2 Les groupes de Poincaré et de Lorentz.....	69
9.3 Scalaires, vecteurs et tenseurs.....	72
10. Petit rappel sur l'oscillateur harmonique.....	73

## Partie 2

<b>Le champ scalaire.....</b>	<b>76</b>
1. Introduction .....	76
2. Théorie classique du champ scalaire .....	76
2.1 Construction du Lagrangien.....	76
2.2 L'équation du mouvement .....	77
2.3 Construction de l'Hamiltonien.....	78
2.4 Les invariants dynamiques .....	79

<b>3. Quantification du champ scalaire.....</b>	<b>82</b>
3.1 Quantification des champs dans une boîte cubique .....	82
3.2 Réécriture de l'Hamiltonien avec les coefficients de Fourier.....	84
3.3 L'oscillateur harmonique quantique .....	85
3.3 Réécriture de l'Hamiltonien avec les opérateurs de création et d'annihilation.....	90
3.4 Construction explicite de l'espace de Hilbert .....	92
3.5 La limite thermodynamique.....	93
3.6 Invariance de Lorentz de la mesure d'intégration .....	95
3.7 La représentation de Heisenberg .....	95
3.8 Le spin du champ scalaire.....	97
<b>4. Résumé de la démarche .....</b>	<b>98</b>
<b>5. Le champ scalaire complexe .....</b>	<b>99</b>
5.1 Le Lagrangien .....	99
5.2 Quantification du champ .....	99
5.3 Une nouvelle symétrie : la charge électrique .....	100
5.4 Particules et antiparticules.....	101
 <b>Le champ vectoriel .....</b>	 <b>105</b>
1. Les équations de Maxwell.....	105
1.1 Les équations de Maxwell en termes de potentiels .....	105
1.2 Le lagrangien du champ électromagnétique.....	107
1.3 L'équation du mouvement .....	108
2. Définition générale du champ vectoriel .....	109
3. Le champ vectoriel massif.....	110
3.1 Construction de la densité lagrangienne.....	110
3.2 L'équation du mouvement .....	113
3.3 Nombre de champs indépendants .....	114
3.4 Les invariants dynamiques : énergie et quantité de mouvement .....	115
3.5 Quantification du champ vectoriel .....	117
3.6 Le spin du champ vectoriel massif.....	122
4. Le champ vectoriel non massif .....	125
4.1 Théorie classique .....	125
4.2 Une nouvelle symétrie : la symétrie de jauge.....	127
 <b>Le champ spinoriel.....</b>	 <b>129</b>
1. Le groupe de Lorentz et $SL(2, \mathbb{C})$ .....	129

2. La représentation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sur $\text{MH}(2, \mathbb{C})$ .....	130
3. Théorie classique du champ spinoriel .....	132
3.1 Construction du Lagrangien .....	132
3.1.1 Le spineur de Dirac à deux composantes .....	132
3.1.2 Le spineur de Dirac à quatre composantes .....	134
3.2 Les équations du mouvement .....	135
3.3 Les invariants dynamiques .....	136
3.3.1 Le tenseur énergie-impulsion .....	136
3.3.2 Le moment cinétique .....	137
3.3.3 La charge .....	140
4. Quantification du champ spinoriel .....	140
4.1 L'équation de Dirac en représentation de Fourier .....	140
4.2 Ecriture de l'Hamiltonien .....	142
4.3 Relations d'anticommutation des spineurs .....	144
4.4 Réécriture des invariants dynamiques : la quantité de mouvement et la charge .....	145
4.5 Le spin du champ spinoriel .....	145
5. Le champ spinoriel sans masse .....	146
6. Les fermions de Majorana .....	148
<b>Références</b> .....	150